УДК 517.946

И. Д. Пукальский, М. И. Матийчук

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Построено классическое решение нелокальной задачи для параболических уравнений любого порядка. Полученный результат применяется при исследовании задачи оптимального управления процессами, описываемыми нелокальными краевыми задачами. Критерий качества задается объемным интегралом.

Настоящая статья посвящена построению классического решения нелокальной задачи для параболического уравнения. Полученный результат применяется при исследовании задачи оптимального управления процессами, описываемыми нелокальными краевыми задачами. Критерий качества задается объемным интегралом. Установлен критерий оптимальности и эквивалентности задачи оптимального управления системе интегральных уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Задачи оптимального управления для уравнений с частными производными со специальными критериями качества рассматривались в работах [5—7].

1. Решение нелокальной граничной задачи. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в R_n с границей S. Рассмотрим в области $Q=(0,T)\times\Omega$ краевую задачу

$$(Lu)(t,x)\equiv\Big(D_t^1-\sum_{|k|\leqslant 2b}a_k(t,x)D_x^k\Big)u(t,x)=f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t_j,x)\,u(t_j,x)=\varphi(x),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$(B_iu)(t,x)|_\Gamma\equiv\Big(\sum_{|k|\leqslant r_i}b_k^{(i)}(t,x)D_x^k\Big)u(t,x)|_\Gamma=g_i(t,z), \tag{3}$$

где $\Gamma=[0,T]\times S$, $r_i\leqslant 2b-1$, $i=\overline{1,b}$, $0<t_1\leqslant\ldots\leqslant t_m\leqslant T$, $(t,z)\in\Gamma$.

Обозначим через $\omega(t)$, $t \in (0, a]$, модули непрерывности, на которых определен оператор $A\omega(t) = \int\limits_0^t \omega(\tau)\,\tau^{-1} d\tau$, существуют при некотором m его степени $A^m\omega(t)$ и выполняется неравенство $\omega(t)\, t^{-\alpha} < \omega(\tau)\,\tau^{-\alpha}$, $0 < \tau < t$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

I. Краевая задача

$$(L\,u)(t, x) = f(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (B_i u)(t, x)\,|_\Gamma = g_i(t, z). \tag{4}$$

параболическая [4].

II. Граничная поверхность S и коэффициенты операторов L и B_i принадлежат классам Дини: $S \in C^{(2b, \omega_s)}$, $a_k \in C^{(0, \omega_0)}(Q)$, $b_k^{(i)}(t, z) \in C^{(2b - r_i, \omega_\Gamma)}(\Gamma)$ и $A^2(\omega_0 + \omega_s + A\omega_\Gamma) < \infty$.

Пусть $\mathscr{G}(t, x, \tau, \xi)$ — функция Грина однородной краевой задачи (4) ($g_i(t, z) \equiv 0$), построенная в [3]. Обозначим через $\Omega_j \equiv Q \cap (t = t_j)$ и $\beta(x) \equiv \sum\limits_{j=1}^m |\beta_j(t_j, x)| \left| \int\limits_\Omega \mathscr{G}(t_j, x, 0, \xi)\, d\xi \right|$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия I, II,

$$\varphi(x) \in C^{(2b, \omega_\varphi)}(\Omega), \quad f(t, x) \in C^{(0, \omega_f)}(Q), \quad g_i(t, z) \in C^{(2b - r_i, \omega_\Gamma)}(\Gamma),$$

$$\beta_j(t_j, x) \in C^{(2b, \omega_\varphi)}(\Omega_j), \quad (B_j\varphi)(t, z)\,|_{t=0} = g_i(0, z), \quad \beta_j(t_j, z) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m |\beta_j(t_j, x)| \leqslant \delta < 1, \quad \beta(x) \leqslant \beta_0 < 1, \quad \text{причем} \quad A\omega_1(t) < \infty,$$

$$\omega_1(t) \equiv A^3\omega_0(t) + A^2(\omega_\varphi + \omega_f + \omega_\Gamma) < \infty.$$

Тогда решение задачи (1) — (3) принадлежит пространству $C^{(2b, \omega_1)}(Q)$ и для него справедлива оценка

$$|u|_{2b}^{\omega_1} \leqslant c\left(|\varphi|_{2b}^{\omega_\varphi} + |f|_0^{\omega_f} + \sum_{i=1}^b |g_i|_{2b - r_i}^{\omega_\Gamma}\right), \tag{5}$$

где c зависит от β_0, δ, T и нормы коэффициентов операторов L и B_i.

Если задача (1) — (3) однородная, т. е. $g_i(t, z) \equiv 0$, то существует функция Грина ($\mathscr{G}$, $E_1, \ldots, E_m$) задачи (1) — (3), с помощью которой решение $u(t, x)$ определяется формулой

$$u(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \mathscr{G}(t, x, \tau, \xi)\, f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_\Omega \mathscr{G}(t, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \left[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_\Omega E_j(t, x, \tau, \xi)\, f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_\Omega E_j(t, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\right].$$

Доказательство. Решение задачи (1) — (3) ищем в виде

$$u(t, x) = \int\limits_\Omega \mathscr{G}(t, x, 0, \xi)\, u(0, \xi)\, d\xi + u_1(t, x), \tag{6}$$

где $u_1(t, x)$ — решение задачи (4). В силу теоремы 1 [2] для u_1 справедлива оценка

$$|u_1|_{2b}^{\omega_1} \leqslant c\left(|\varphi|_{2b}^{\omega_\varphi} + |f|_0^{\omega_f} + \sum_{i=1}^b |g_i|_{2b - r_i}^{\omega_\Gamma}\right). \tag{7}$$

Удовлетворяя условие (2), находим

$$u(0, x) + \sum_{j=1}^m \beta_j(t_j, x) \int\limits_\Omega \mathscr{G}(t_j, x, 0, \xi)\, u(0, \xi)\, d\xi = F(x), \tag{8}$$

$$F(x) \equiv -\sum_{j=1}^m \beta_j(t_j, x)\, u_1(t_j, x).$$

Учитывая ограничение на функцию $\beta(x)$, $\beta_0 < 1$, находим решение интегрального уравнения (8)

$$u(0, x) = F(x) + \int\limits_{\Omega} R(x, y) F(y)\, dy, \tag{9}$$

где резольвента $R(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x, \xi) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x)\, \mathcal{G}(t_j, x, 0, \xi) + \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x)\, \mathcal{G}(t_j, x, 0, y)\, R(y, \xi)\, dy, \tag{10}$$

с помощью которого получаем

$$\left| \int\limits_{\Omega} R(x, \xi)\, d\xi \right| \frac{\beta_0}{1 - \beta_0}.$$

Следовательно, для решения интегрального уравнения (8) справедлива оценка

$$|u(0, x)| \leqslant c\, |u_1|_{C(Q)} \leqslant c\, |\varphi|_{C(\Omega)} + c_1 |f|_{C(Q)} + c_2 \sum_{i=1}^{b} |g_i|_{C(\Gamma)}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (6) и учитывая оценки функции Грина, находим $u(t_j, x) \in C^{(2b, \omega_1)}(\Omega_j)$ и

$$|u(t, x)| \leqslant c\, |u_1|_{C(Q)}. \tag{12}$$

Для доказательства неравенства (5) задачу (1) — (3) запишем в виде

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \quad (B_i u)(t, x)|_{\Gamma} = g_i(t, z),$$

$$u(0, x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x)\, u(t_j, x) \equiv \varphi_1(x).$$

Для решения этой задачи справедлива оценка (7), только в правой части вместо $|\varphi|_{2b}^{\omega_\varphi}$ берем $|\varphi_1|_{2b}^{\omega_\varphi}$. Используя интерполяционные неравенства [4], находим

$$|\varphi_1|_{2b}^{\omega_\varphi} \leqslant |\varphi|_{2b}^{\omega_\varphi} + (\delta + \varepsilon)\, |u|_{2b}^{\omega_1} + c(\varepsilon)\, |u|_{C(Q)}, \tag{13}$$

где ε — произвольное число $\varepsilon \in (0, 1 - \delta)$.

Выбирая, например, $\varepsilon = 2^{-1}(1 - \delta)$ и учитывая (12), (11), (7), получаем неравенство (5).

Подставляя в (9) вместо $F(x)$ значение

$$F(x) = -\sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x) \left[\int\limits_{0}^{t_j} d\tau \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(t_j, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(t_j, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \right] \tag{14}$$

и меняя порядок интегрирования, находим

$$u(0, x) = \sum_{j=1}^{m} \left[\int\limits_{0}^{t_j} d\tau \int\limits_{\Omega} E(t_j, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} E(t_j, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \right],$$

$$E(t_j, x, \tau, \xi) \equiv \beta_j(t_j, x)\, \mathcal{G}(t_j, x, \tau, \xi) + \tag{15}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} R(x, y)\, \beta_j(t_j, y)\, \mathcal{G}(t_j, y, \tau, \xi)\, dy.$$

Подставляя значение $u(0, x)$ в поверхностный интеграл (8) и меняя в нем, на основании абсолютной сходимости, порядок интегрирования, получаем

$$u(t, x) = \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(t, x, \tau, \xi) f(t, \xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(t, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left[\int\limits_{0}^{t_j} d\tau \int\limits_{\Omega} E_j(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} E_j(t, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \right], \tag{16}$$

где

$$E_j(t, x, \tau, \xi) = \int_{\Omega} \mathscr{G}(t, x, 0, y) \Big[\beta_j(t_j, y) \mathscr{G}(t_j, y, \tau, \xi) +$$

$$+ \int_{\Omega} R(y, \mu) \beta_j(t_j, \mu) \mathscr{G}(t_j, \mu, \tau, \xi) \, d\mu \Big] \, dy.$$

Замечание 1. Если выполнены условия I, II, $\varphi \in C^{(0,\omega_\varphi)}(\Omega)$, $f \in C^{(0,\omega_f)}(Q)$, $g_i \in C^{(2b-r_i-1,\omega_\Gamma)}(\Gamma)$, $\beta_j \in C^{(0,\omega_\varphi)}(\Omega_j)$, $\beta_0 < 1$, то классическое решение задачи (1) — (3) удовлетворяет неравенствам

$$|D_x^k u| \leqslant c Q_{|k|}(t, \rho(x, S)) \left(|\varphi|_0^{\omega_\varphi} + |f|_0^{\omega_f} + \sum_{i=1}^{b} |g_i|_{2b-r_i-1}^{\omega_\Gamma} \right), \qquad (17)$$

где $Q_{2b}(t, \rho) = t^{-1+\frac{1}{2b}} (t^{-\frac{1}{2b}} + \rho^{-1})$, $Q_{2b-1} = t^{-1+\frac{1}{2b}} \ln \rho^{-1}$, $Q_{|k|}(t, \rho) = t^{-\frac{|k|}{2b}}$, $|k| < 2b - 1$.

Оценки (17) получаются из формулы (6) при помощи оценок производных функции Грина и неравенства (11).

В случае равенства порядков краевых операторов $r_i = r$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов операторов L, B, функций $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $g(t, z)$ и поверхности S выполняются условия теоремы [1, с. 1294], $\beta_j \in C(\Omega_j)$. Тогда классическое решение задачи (1) — (3) удовлетворяет неравенствам

$$|D_x^k u| \leqslant c B_r(t, \varphi, f, g) [t^{-\frac{|k|-r}{2b}} + Q_{|k|-r}(\rho(x, S))] \, t^{-\frac{r}{2b}}, \qquad (18)$$

где $B_r(t, \varphi, f, g) = |\varphi|_{C(\Omega)} + t |f|_0^{\omega_f} + t^{\frac{r}{2b}} |g|_{C(\Gamma)}$, $Q_l(\rho) = \rho^{-l}$, $Q_{-l}(\rho) = 0$, $l > 0$, $Q_0(\rho) = \ln \rho^{-1}$.

Используя функцию Грина, построенную в [3], решение задачи ищем в виде

$$u(t, x) = \int_{\Omega} G_1(t, x, 0, \xi) [u(0, \xi) + \varphi(\xi)] \, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G_1(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi) \, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_S G_2(t, x, \tau, \xi) g(\tau, \xi) \, d_\xi S \equiv \int_{\Omega} G_1(t, x, 0, \xi) u(0, \xi) \, d\xi + \Phi(t, x). \qquad (19)$$

Удовлетворяя условию (2), получаем интегральное уравнение относительно $u(0, x)$:

$$u(0, x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x) \int_{\Omega} G_1(t_j, x, 0, \xi) u(0, \xi) \, d\xi = -\sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x) \Phi(t_j, x). \qquad (20)$$

Применяя приведенные выше рассуждения, находим

$$|u(0, x)| \leqslant c |f|_{C(Q)} + c_1 |g|_{C(\Gamma)} + c_2 |\varphi|_{C(\Omega)}. \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (19) и используя свойства функции Грина, находим оценки (18).

2. Оптимальность решения нелокальной граничной задачи с управлением. Рассмотрим в цилиндрической области Q задачу нахождения пары функций (u, p), доставляющих минимум функционалу

$$J(p) = \int_{\Omega} \mathscr{F}(x, u(t_1, x, p), \ \ldots, \ u(t_m, x, p), p) \, dx \qquad (22)$$

в классе $C(\Omega)$, из которых $u(t, x, p)$ является решением краевой задачи

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \quad (B_i u)(t, x)|_\Gamma = g_i(t, z), \quad i = \overline{1, b},$$

$$u(0, x, p) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x) u(t_j, x, p) = \varphi(x, p). \qquad (23)$$

Предположим, что для задачи (22), (23) выполнены условия I, II, функции $\varphi(x, p)$ и $\mathcal{F}(x, \vec{u})$, определенные соответственно в областях $M_1 = \Omega \times R_1$ и $M_2 = \Omega \times R_{m+1}$, имеют гельдеровые производные второго порядка по $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_{m+1}) \equiv (u(t_1, x, u_{m+1}), \ldots, u(t_m, x, u_{m+1}), u_{m+1})$, принадлежащие как функции (t, x) классу $C(\Omega)$.

Обозначим $E(t, x, 0, \xi) \equiv \mathscr{E}(t, x, 0, \xi) + \sum_{j=1}^{m} E_j(t, x, 0, \xi)$ и положим

$$v(x, \vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} E(t_k, \xi, 0, x)\, D_{u_k}\mathcal{F}(\xi, \vec{u})\, d\xi.$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности $p(t, x) \equiv u_{m+1}$.

Теорема 3. Для того чтобы управление $\overset{0}{u}_{m+1}$ и соответствующее ему решение $u^0(t, x, \overset{0}{u}_{m+1})$ краевой задачи (23) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функция $H(\vec{u}, v) \equiv \mathcal{F}(x, \vec{u}) + v(x, \vec{u})\, \varphi(x, u_{m+1})$ по аргументу u_{m+1} принимала в точке $\overset{0}{u}_{m+1}$ минимальное значение;

2) для произвольного вектора $\vec{\nu} \neq 0$ и $x \in \overline{\Omega}$ имело место неравенство

$$\mathcal{K}(x, \nu) \equiv \sum_{ij=1}^{m+1} D^2_{u_i u_j}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \nu_i \nu_j + v(x, \vec{u}^0)\, D^2_{u_{m+1}}\varphi(x, u_{m+1})\, \nu^2_{m+1} > 0.$$

Доказательство. **Достаточность.** Предположим, что $\overset{0}{u}_{m+1}$ удовлетворяет условиям 1), 2). Покажем его оптимальность.

Пусть Δu_{m+1} — некоторое допустимое приращение u_{m+1}. Тогда соответствующее приращение функции $u(t, x, u_{m+1})$ будет решением краевой задачи

$$(L\Delta u)(t, x) = 0, \quad (B_i \Delta u)(t, x)|_{\Gamma} = 0,$$

$$\Delta u(0, x, p) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, x)\, \Delta u(t_j, x, p) = \Delta\varphi \equiv \varphi(x, p + \Delta p) - \varphi(x, p). \quad (24)$$

С помощью формулы Тейлора находим приращение функционала

$$\Delta J = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m+1} D_{u_k}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \Delta u_k + 2^{-1} \sum_{i,j=1}^{m+1} (D^2_{u_i u_j}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0) \Delta u_i \Delta u_j + \varepsilon_{ij} \Delta u_i \Delta u_j) \right) dx, \quad (25)$$

где $\varepsilon_{ij} = D^2_{u_i u_j}\mathcal{F}(x, \vec{u}^*) - D^2_{u_i u_j}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)$, $u_i^* \in [\overset{0}{u}_i, \overset{0}{u}_i + \Delta u_i]$.

В силу того что Δu — решение задачи (24), то, используя функцию $E(t, x, 0, \xi)$, имеем

$$\Delta u_k = \int_{\Omega} E(t_k, x, 0, \xi)\, \Delta\varphi(\xi, u_{m+1})\, d\xi, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Поэтому соотношение (25) запишем в виде

$$\Delta J = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} D_{u_k}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0) \int_{\Omega} E(t_k, x, 0, \xi)\, \Delta\varphi(\xi, u_{\xi+1})\, d\xi \right) dx +$$
$$+ \int_{\Omega} D_{u_{m+1}}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \Delta u_{m+1} dx + 2^{-1} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m+1} D^2_{u_i u_j}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \Delta u_i \Delta u_j + \right.$$
$$\left. + \varepsilon_{ij} \Delta u_i \Delta u_j \right) dx = \int_{\Omega} \left[D_{u_{m+1}}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \Delta u_{m+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} E(t_k, x, 0, \xi)\, D_{u_k}\mathcal{F}(\xi, \vec{u}^0)\, d\xi \Delta\varphi(x, u_{m+1}) \right] dx +$$
$$+ 2^{-1} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^{m+1} D^2_{u_k u_i}\mathcal{F}(x, \vec{u}^0)\, \Delta u_k \Delta u_i + \varepsilon_{ik} \Delta u_k \Delta u_i \right) dx =$$
$$= \int_{\Omega} \{ D_{u_{m+1}} H(\vec{u}^0, v)\, \Delta u_{m+1} + 2^{-1}\mathcal{K}(x, \Delta u) + \mathcal{K}^*(x, \Delta u) \}\, dx. \quad (26)$$

Здесь

$$\mathscr{K}^*(x, \Delta u) \equiv 2^{-1} \sum_{i,k=1}^{m+1} \varepsilon_{ik} \Delta u_k \Delta u_i + 2^{-1} v(x, \vec{u}^0) (\Delta u_{m+1})^2 \times$$

$$\times [D^2_{u_{m+1}} \varphi(x, u^*_{m+1}) - D^2_{u_{m+1}} \varphi(x, u^0_{m+1})].$$

Оценим ΔJ снизу, учитывая, что по условию 1) $D_{u_{m+1}} H(\vec{u}^0, v) = 0$. По условию 2) $\mathscr{K}(x, \Delta u) \geqslant \delta(x) \mid \Delta u \mid^2$, где $\delta(x) \equiv \inf\limits_{|\xi|=1} \mathscr{K}(x, \xi) > 0$.

Используя условие гельдеровости вторых производных функций $\mathscr{F}(x, \vec{u})$ и $\varphi(x, u_{m+1})$, находим $\mid \mathscr{K}^*(x, \Delta u) \mid \leqslant 2^{-1} c_0 \mid \Delta u \mid^{2+\alpha}$. На основании последних двух неравенств заключаем, что $\Delta J > 0$.

Необходимость устанавливается при помощи методики доказательства теоремы 1 [6].

Существование u^0_{m+1}, u^0, v^0 устанавливается следующим образом. Если u^0_{m+1} оптимально, то $D_{u_{m+1}} H(\vec{u}^0, v^0) = 0$ и $D^2_{u_{m+1}} H(\vec{u}^0, v^0) > 0$. В силу теоремы о неявных функциях [5], применимой к уравнению $D_{u_{m+1}} H(\vec{u}^0, v^0) = 0$, существует такая дифференцируемая функция, что

$$u^0_{m+1} = W_1(u', v) = W_1(u_1, \ldots, u_m, v) = p^0.$$

Используя формулу (14), поставим в соответствие задачи (22), (23) систему интегральных уравнений

$$u(t, x, p^0) = \int_\Omega E(t, x, 0, \xi) \{\varphi(\xi, p^0) - [w(0, \xi) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t_j, \xi) w(t_j, \xi) d\xi]\} + w(t, x),$$

$$v(x, \vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \int_\Omega E(t_k, \xi, 0, x) D_{u_k} \mathscr{F}(\xi, \vec{u}) d\xi, \tag{27}$$

где $w(t, x)$ — решение краевой задачи

$$(Lw)(t, x) = f(t, x), \quad w(0, x) = 0, \quad (B_i w)(t, z) = g_i(t, z).$$

Решение системы (27) ищем методом последовательных приближений.

О необходимости ограничения $\sum\limits_{j=1}^{m} \mid \beta_j \mid < \delta < 1$ свидетельствует и следующий пример. Пусть $Q = (0, T) \times (0, \infty)$ и $G(t, x)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Тогда при любых $f(t, x) \in C^{(0,\omega_f)}(Q)$ решение задачи

$$D_t u = D^2_x u + f(t, x), \quad u(0, x) - \delta u(T, x) = 0, \quad u(0, t) = 0$$

представимо в виде

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty [G(t-\tau, x-\xi) - G(t-\tau, x+\xi)] f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_0^\infty [E(t+T-\tau, x-\xi, \delta) - E(t+T-\tau, x+\xi, \delta] f(\tau, \xi) d\xi,$$

где

$$E(t+T-\tau, x, \delta) = \delta \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k G(t+T+kT-\tau, x),$$

причем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^k G(t+T+kT-\tau, x)$ расходится при $\delta \geqslant 1$.

1. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. II // Дифференц. уравнения.— 1976.— **11**, № 7.— С. 1293—1303.
2. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. III // Там же.— 1978.— **14**, № 2.— С. 291—303.

3. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. IV // Там же.— № 5.— С. 885—899.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 445 с.
5. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 429 с.
6. *Пукальский И. Д., Матийчук М. И.* О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимальногс управления // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 6.— С. 738—744.
7. *Сущ В. М.* Управление в нелокальных граничных задачах // Дифференц. уравнения.— 1989.— 25, № 1.— С. 145—153.
8. *Chabrowski J.* On non-local problems for parabolic equations // Nagoya Math. J.— 1984.— 93.— P. 109—131.

Черновиц. гос. ун-т

Получено 15.09.90